On the 2-Part of Artin Exponent of Finite Groups (有限群の群環と表現論)

山内, 憲一

数理解析研究所講究録
111巻 1971年 1-20

On the 2-part of Artin exponent of finite groups.

東京教育大学大学院　　山内憲一

§1. Introduction

定義　π 有限群，Q 有理数体

$G(Q\pi)$ the Grothendieck ring of all rational representations of π.

$G_c(Q\pi)$ the ideal in $G(Q\pi)$ generated by rational representations of π induced from cyclic subgroups.

このとき $G(Q\pi)/G_c(Q\pi)$ の smallest exponent を Artin exponent といい，記号 $A(\pi)$ で示す。

Artin の induction theorem により $A(\pi) \mid |\pi|$.

Example

S_n : symmetric group on n elements.

D_8 : dihedral group of eight elements.

Q_8 quaternion group of eight elements.

とするとき，各 group の Artin exponent は下のようになる。

π	$[\pi:1]$	$A(\pi)$
S_4	24	2
S_5	120	4
D_8	8	2
Q_8	8	2
π cyclic	$[\pi:1]$	1

Artin exponent については，T.Y. Lam [1] に相当くわしく研究されている。しかしながら，Artin exponent の 2-part（これを今後 $A_2(\pi)$ としるす）についてはふれていない。それでここでは Artin exponent の 2-part を求めることにした。

話しの順序として上記の Lam の論文にある定理を引用しながら説明を進める。なお，この introduction で述べる定理の番号は Lam の論文に書かれている定理の番号を示すものである。

定理 7.4

p : odd prime , π finite group

$\pi^{(p)}$: π の p-Sylow subgroup , non cyclic

$[\pi^{(p)} : 1] = p^n$,

$\Longrightarrow$

(a) $A_p(\pi) = p^n$ if $\exists$ a cyclic p-free group $D \subset \pi$ normalized by $\pi^{(p)}$, on which the conjugate action of $\pi^{(p)}$ is faithful

(b) $A_p(\pi) = p^{n-1}$ if otherwise

Remark 1 $p=2$ で $\pi^{(2)} \not\cong D, Q, SD$ ならば上の定理はそのまま通用する。ただし D, Q, SD はそれぞれ dihedral group, quaternion group, semi-dihedral group (くわしい定義は後に述べる) とする。

Remark 2 p : prime number , $\pi^{(p)}$: cyclic group のとき $A_p(\pi)$ の値は知られている。特に $p=2$ でもよい。

定理 3.1 (Witt induction theorem)

$A(\pi) =$ l.c.m. $A(\pi')$ where the l.c.m.

is taken over all hyperelementary subgroups π' of π.

Witt の induction theorem によって $A(\pi)$ の決定は本質的には hyperelementary subgroups のそれに帰着される。それゆえ，定理7.4に注目して，π : semidirect product of 2-free cyclic group $C = \langle c \rangle$ with one of D, Q, SD とするとき，$A_2(\pi)$ を求めることにした。

§2. Preliminaries

この節では Lam の論文[1]に書かれている基本的な事項を列挙して後の参考にする。まず基本的な notation および定義をかかげる。

π : 有限群

$\pi_1 = 1,\ \pi_2, \cdots\cdots, \pi_q$: a full set of nonconjugate cyclic subgroups of π.

1_j : a principal character of π_j

μ_j : induced character 1_j^* on π

このとき $\{\mu_j\}$ を Artin character と呼ぶ。

補題 2.1

$\mu_1, \cdots\cdots, \mu_q$ は Q（有理数体）上１次独立である。

定義 2.2　π : a finite group

χ を π の任意の rational character とするとき

$$m\chi = \sum_{k=1}^{q} a_k \mu_k \quad , \quad a_k \in \mathbb{Z}$$

と書ける最小の正の整数 m を π の Artin exponent といい，これを $A(\pi)$ と書く。また $A(\pi)$ の倍数も Artin exponent ということがある。

補　題 2.3

1 : π の principal character ,　$d \in \mathbb{Z}$

このとき次の条件（P）が成立すれば，d は Artin exponent である。

条件（P）　$d1 = \sum_{k=1}^{q} a_k \mu_k$ となるような整数 a_k が存在する。

また $a_1, \cdots\cdots, a_q$ に公約数がなければ，　$d = A(\pi)$

［証明］　χ　any rational character of π とする。

$$d1 = \sum_{k=1}^{q} a_k \mu_k \ , \quad a_k \in \mathbb{Z}$$

の両辺に χ を掛けて，

$$d\chi = \sum_{k=1}^{q} a_k \mu_k \chi = \sum_{k=1}^{q} a_k \left(1_{\pi_k} \cdot \chi|_{\pi_k} \right)^*$$

($\because$ Frobenius reciprocity)

$= \sum_{k=1}^{q} a_k \mu_k'$, $\mu_k' = (1_{\pi_k} \cdot \chi|_{\pi_k})^*$ a character on π induced from some character of π_k.

π_k : cyclic group だから $A(\pi_k) = 1$

transitivity of the induction procedure から

$$\mu_k' = \sum_{j=1}^{q} b_{kj}\mu_j , \quad b_{kj} \in \mathbb{Z}$$ と書ける

したがって

$$d\chi = \sum_j \left(\sum_k a_k b_{kj} \right) \mu_j$$

ゆえに d は Artin exponent of π である。[証明終]

補題 2.4

π' : a subgroup of a finite group π

$\Longrightarrow A(\pi') \mid A(\pi)$

[証明] Artin exponent の定義から

$$A(\pi)\,1 = \sum_{k=1}^{q} a_k \mu_k , \quad a_k \in \mathbb{Z}$$

Let i^* denote taking restriction of characters from π to π'.

$$i^*(A(\pi)\,1) = \sum_{k=1}^{q} a_k\, i^*(\mu_k) \qquad (1)$$

Mackey's subgroup theorem から

$i^*(\mu_k)$ = an integral combination of characters induced from trivial representations of $x\pi_k x^{-1} \cap \pi'$

ここで各 $x\pi_k x^{-1} \cap \pi'$ は cyclic group であるから

(1) の右辺 = an integral combination of Artin characters on π'.

(1) の左辺 $= A(\pi)\, 1_{\pi'}$ where $1_{\pi'}$: principal character of π'.

ゆえに前補題より $A(\pi)$ は Artin exponent of π'.

したがって $A(\pi') \mid A(\pi)$ [証明終]

定義 2.5

$\pi \triangleright \pi'$. π' cyclic group

π/π' : p-group for some prime p

このとき π を hyperelementary group という。

定理 2.6 (Witt induction theorem)

$$A(\pi) = \text{l.c.m. } A(\pi')$$

ここで l.c.m. は π のすべての hyperelementary subgroup π' についてとられる。

[証明] 前補題より $\text{l.c.m. } A(\pi') \mid A(\pi)$ は明らか。

次に $d = \text{l.c.m. } A(\pi')$ とおいて $A(\pi) \mid d$ を証明する。

χ : 任意の rational character とする。

Witt の induction theorem（Swan [3]）から

$\chi = \sum_j a_j \chi_j^*$, $a_j \in \mathbb{Z}$, χ_j characters on hyper-elementary subgroups π_j'.

また $A(\pi_j') \mid d$ だから、$d\chi_j$ = an integral combination of Artin characters on π_j'.

transitivity of operation $*$ によって

$d\chi$ = an integral combination of Artin characters on π.

$\therefore \quad A(\pi) \mid d.$ ［証明終］

§3 Brauer coefficient theorem

π : 有限群

χ : π 上の任意の rational character とすれば、

Artin の induction theorem から

$$\chi = \sum_{\pi'} c_{\pi'} 1_{\pi'}^* \qquad (1)$$

ここで π' は π のすべての cyclic subgroup を動く。

$c_{\pi'}$: 有理数

しかしながら Brauer によれば formula (1) はもっと精密化できる。

定理 3.1（Brauer [2]）

$$C_{\pi'} = \frac{1}{[\pi : \pi']} \sum_{\pi''} \mu([\pi'' : \pi'])\, \chi(x'')$$

where μ : Möbius function defined on the natural numbers. $\sum$ は $\pi'' = \langle x'' \rangle \supseteq \pi'$ なる cyclic subgroup π'' すべてにわたって取られる。

[証明] 式(1)の右辺を χ^* とおいて $\chi = \chi^*$ であることを証明する。

$\pi \ni {}^\forall \alpha$ を取れば

(i) α が π' のどの element とも共役でないとき

$$1^*_{\pi'}(\alpha) = 0$$

(ii) α が π' の element と共役であるとき

$$1^*_{\pi'}(\alpha) = \frac{[N(\langle\alpha\rangle) : 1]}{[\pi' : 1]}$$

ゆえに $\chi^*(\alpha) = \sum_{\pi'} C_{\pi'} 1^*_{\pi'}(\alpha)$

$$= \frac{[N(\langle\alpha\rangle):1]}{[\pi':1]} \cdot \frac{1}{[\pi:\pi']} \sum_{\pi'}{}' \sum_{\pi'' \supseteq \pi'} \mu([\pi'' : \pi'])\, \chi(x'')$$

$$= \frac{[N(\langle\alpha\rangle):1]}{[\pi:1]} \sum_{\pi'}{}' \sum_{\pi'' \supseteq \pi'} \mu([\pi'' : \pi'])\, \chi(x'')$$

ただし和 $\sum'$ は、α と共役な element を含むような π の cyclic subgroup π' について取られる。

さて $\langle\alpha\rangle$ に共役な group は $[\pi : N(\langle\alpha\rangle)]$ 個存在する。それらを $\langle\alpha\rangle$, $\langle\alpha'\rangle$, $\langle\alpha''\rangle$, …… とする。

上の和$\sum'$におけるπ'は（高々）1個のそのような$\langle\alpha^{(j)}\rangle$を含むことができる。したがって

$$\chi^*(\alpha)=\sum_{\pi'}{}''\sum_{\pi''}\mu([\pi'':\pi'])\chi(x'')$$

ここで和$\sum''$は$\langle\alpha\rangle$を含むcyclic subgroup π'についてのみとられる。

さらに次のように変形できる。

$$\chi^*(\alpha)=\sum_{\pi''}{}^*\chi(x'')\sum_{\pi'}{}'''\mu([\pi'':\pi'])$$

$$\text{in } \sum{}^*,\ \pi''\supseteq\langle\alpha\rangle\quad;\ \text{in } \sum{}''',\ \pi''\supseteq\pi'\supseteq\langle\alpha\rangle.$$

x''の order $=m$, αの order $=q$とすれば.

$$\sum_{\pi'}{}'''\mu([\pi'':\pi'])=\sum_{d\mid\frac{m}{q}}\mu(d)=\begin{cases}0 & m\neq q\\ 1 & m=q\end{cases}$$

$m=q$のとき　$\pi''=\langle x''\rangle=\langle\alpha\rangle$

$\therefore\ \chi(x'')=\chi(\alpha)$　（Artinの定理）

$\therefore\ \chi^*(\alpha)=\chi(\alpha)$　　　　［証明終］

定理 3.2 （Brauer coefficient theorem）

$$1=\sum_{j=1}^{q}b_j\mu_j\quad\text{where } b_j=\frac{1}{[N\pi_j:\pi_j]}\sum_{\pi'}\mu([\pi':\pi_j])$$

和$\sum$は$\pi'\supseteq\pi_j$なるcyclic subgroup π'すべてに

わたって取られる。

[証明] The number of π' conjugate to a fixed π_j

$$= [\pi : N(\pi_j)]$$

そして $\pi' \sim \pi_j$ (i.e. conjugate) $\Longrightarrow 1^*_{\pi'} = 1^*_{\pi_j} = \mu_j$

ゆえに定理3.1を使用すれば上の結論を得る。［証明終］

定理 3.3

π_1, π_2 有限群 $(|\pi_1|, |\pi_2|) = 1$

$$\Longrightarrow A(\pi_1 \times \pi_2) = A(\pi_1) A(\pi_2)$$

[証明] T.Y. Lam [1] 参照

Example (Brauer の定理の応用)

$SD = \langle a, b \rangle$ semi-dihedral group

$a^{2^n} = 1, \ b^2 = 1, \ bab^{-1} = a^{-1+2^{n-1}}, \ n \geqq 3$

とすれば, $A(SD) = 4$

注 Lam [1] では $A(SD) = 2$ となっているがこれは間違いである。

以下に $A(SD) = 4$ の証明を述べる。

SD の構造を調べる。2つの cyclic groups が共役であることを"$\sim$"の記号で表わせば,

$\langle b \rangle \sim \langle a^2 b \rangle \sim \cdots\cdots \sim \langle a^{2^n - 2} b \rangle$ 2^{n-1} 個の order 2 の cyclic group

$\langle a^{2^{n-1}} \rangle$ order 2 の cyclic group でこれのみで共役類をなす。

$\langle ab \rangle \sim \langle a^3 b \rangle \sim \cdots\cdots \sim \langle a^{2^{n-1}-1} b \rangle$: 2^{n-2} 個の order 4 の cyclic group.

。包含関係 $\langle a^{2l+1} b \rangle \supset \langle a^{2^{n-1}} \rangle$

$$\langle a^{2l+1} b \rangle = \langle a^{2^{n-1}+2l+1} b \rangle$$

次の5つの場合に分けて $A(SD)$ を求める。任意の cyclic subgroup π_j を取る。

(i) π_j の generator が $\langle a \rangle$ に含まれていないとき

$[\pi_j : 1] = 2$ or 4, ところが π_j と共役なものの個数はそれぞれ 2^{n-1} or 2^{n-2} であるから $[N\pi_j : \pi_j] = 2$

(ii) $\pi_j = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ のとき

まず $[N\pi_j : \pi_j] = 2^n$. π_j に対応する Brauer 係数の分子を考えると，それは

$$\sum_{\pi'} \mu([\pi' : \pi_j]) = 1 - (2^{n-2}+1) = -2^{n-2}$$

ここで和 $\sum$ は $SD \supset \pi' \supset \pi_j$ なるすべての cyclic group π' について取られる。

ゆえに Brauer 係数 $= -2^{n-2}/2^n = -\frac{1}{4}$

(iii) $\pi_j \subset \langle a \rangle$ but $\pi_j \neq 1, \langle a^{2^{n-1}} \rangle, \langle a \rangle$ のとき

$[\pi_j : 1] \geqq 4$ より，$SD \supset \pi' \supset \pi_j$ となる cyclic group π' はすべて $\langle a \rangle$ に含まれる。従って π_j に対応する

Brauer 係数の分子は，$\sum_{\pi'} \mu([\pi' : \pi_j]) = \mu(1) + \mu(2) = 0$

(iv) $\pi_j = \langle a \rangle$ のとき　　明らかに $[N\pi_j : \pi_j] = 2$

(v) $\pi_j = \langle 1 \rangle$ のとき

order 2 の cyclic groups の個数は $2^{n-1}+1$。よって π_j に対応する Brauer 係数は，$\{1-(2^{n-1}+1)\}/2^{n+1} = -\frac{1}{4}$

以上 (i) ～ (v) により　$A(SD) = 4$

§ 4　On the 2-part of Artin exponent of finite groups

定義

$D = \langle a, b \rangle$　dihedral group

$a^{2^n} = 1$, $b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $n \geqq 2$

$Q = \langle a, b \rangle$　quaternion group

$a^{2^n} = 1$, $b^2 = a^{2^{n-1}}$, $bab^{-1} = a^{-1}$　$n \geqq 2$

$SD = \langle a, b \rangle$　semidihedral group

$a^{2^n} = 1$, $b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1+2^{n-1}}$　$n \geqq 3$

補題 4.1

$a^2 \in [G, G]$ for any $G = D, Q, SD$

The factor commutator group of G is of type $(2, 2)$.

[証明]　$a^2 = aba^{-1}b^{-1}$ for $G = D, Q$

$$a^2 = (aba^{-1}b^{-1})^{1-2^{n-2}} \text{ for } G = SD.$$

後半は明らか。

補題 4.2

π ： 有限群

π_j ： πの nonmaximal 巡回群

π_0 ： π_jを含むπの maximal 巡回群

$$\Longrightarrow \quad \sum_{\pi'} \mu([\pi' : \pi_j]) = 0$$

和$\sum$は　$\pi_0 \supseteq \pi' \supseteq \pi_j$ なるすべての巡回群π'にわたってとられるものとする。

[証明]　$[\pi_0 : \pi_j] = h$ とすれば，$\displaystyle\sum_{\pi'} \mu([\pi' : \pi_j]) = \sum_{d|h} \mu(d)$

ところが $\displaystyle\sum_{d|h} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } h=1 \\ 0 & \text{if } h>1 \end{cases}$

π_j ： nonmaximal 巡回群であるから　$[\pi_0 : \pi_j] = h > 1$

$\therefore \displaystyle\sum_{\pi'} \mu([\pi' : \pi_j]) = 0$　　[証明終]

補題 4.3

$G = D, Q\ (n \geqq 3), SD$

$C = \langle c \rangle$　2-free cyclic group on which G operates.

$\pi = C \cdot D,\ C \cdot Q,\ C \cdot SD$　semidirect product

$\Longrightarrow$

$\langle ca^2 \rangle = \langle c \rangle \langle a^2 \rangle$: a normal maximal cyclic subgroup of π, if $ac \neq ca$.

[証明] a^2 を含む G の cyclic subgroup は $\langle a^2 \rangle$ および $\langle a \rangle$ だけである。 もし $\langle d \rangle \ni ca^2$ とすれば $\langle d \rangle / C \ni a^2$. 仮定から $\langle d \rangle / C \not\ni a$

$\therefore \langle d \rangle / C = \langle a^2 \rangle \qquad \therefore \langle d \rangle = \langle ca^2 \rangle$

また明らかに $\pi \rhd \langle ca^2 \rangle = \langle c \rangle \langle a^2 \rangle$ [証明終]

定理 4.4 $C = \langle c \rangle$ 2-free cyclic group on which D operates.

$\pi = C \cdot D$ semidirect product.

$$\Longrightarrow \quad A_2(\pi) = \begin{cases} 2 & \text{if } ac = ca. \\ 4 & \text{if } ac \neq ca. \end{cases}$$

まづ次の補題を証明する。

補題 4.5

$\langle c^i a^{2l} \rangle \not\subset \langle c^r a^t b \rangle$ for $1 \leq l \leq 2^{n-1} - 1$

[証明] $(c^r a^t b)^2 = c^r (a^t b) c^r (a^t b)^{-1} \in C$ [証明終]

さて定理 4.4 の証明にとりかかる。 任意の cyclic subgroup $\pi_d \subseteq \pi$ を取る。

Step 1. $\pi_d = \langle c^i a^j b \rangle$, $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0 \Longrightarrow$

2-part of $[N\pi_\alpha : \pi_\alpha] = 2$.

Denote natural hom $\pi = C \cdot D \longrightarrow \pi/C = D$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ni x \longmapsto \bar{x} \in$

もし $x \in N(\pi_\alpha)$ ならば $\bar{x} \in N_D(\langle a^j b \rangle)$.
$N_D(\langle a^j b \rangle)$ は 1, $a^{2^{n-1}}$, $a^j b$, $a^{j+2^{n-1}} b$ の4つの element からなる group である。
ゆえに 2-part of the order of $N(\pi_\alpha) = 4$
したがって 2-part of $[N\pi_\alpha : \pi_\alpha] = 2$

Step 2. On the Brauer coefficient at $\pi_\alpha = C' \subset C$
$\rho_\pi^{C'} = \sum_{\pi''} \mu([\pi'' : C'])$ とおく。ただし π'' は 2-regular component が C' に等しい π の cyclic group すべてを動く。

補題 4.6 $\quad 2^{n-1} \mid \rho_\pi^{C'}$

特に $a \in$ centralizer of $C' \Longrightarrow 2^n \mid \rho_\pi^{C'}$

[証明] centralizer of C' を $\mathrm{Cent}(C')$ と書く。
明らかに $\mathrm{Cent}(C')$ の中で $\rho_\pi^{C'}$ を求めればよい。そこで $\pi'' = C' \times Y$ (Y: a 2-group) と書いておこう。
$\pi'' = C' \times Y$ が $\rho_\pi^{C'}$ に影響するのは, Y の order が 1 または 2 のときだけである。 $a^{2^{n-1}}$ を除いて order 2 の element は $y = c^i a^j b$ の形のものばかりである。

$y \in Cent(C') \Longrightarrow a^{2\ell} y \in Cent(C')$

$\therefore$ number of possible Υ of order 2 $\equiv 1 \mod 2^{n-1}$.

$\therefore\ \rho_\pi^{C'} = 1 -$ number of $\Upsilon \equiv 0 \mod 2^{n-1}$.

次に $a \in Cent(C') \Longrightarrow$ all $a^\ell y \in Cent(C')$

for any $y \in Cent(C')$

$\therefore\ \rho_\pi^{C'} = 1 -$ number of $\Upsilon \equiv 0 \mod 2^n$ [証明終]

cyclic subgroup $C' \subseteq C$ に対して $\rho_\pi(C') = \sum_{\pi''} \mu([\pi'' : C'])$ とおく. ここで π'' は $\pi'' \supseteq C'$ なる π の cyclic subgroup π'' すべてを動くとする。

すなわち $\rho_\pi(C')$ は C' における Brauer 係数の分子を表わす。

補題 4.7 $\quad 2^{n-1} \mid \rho_\pi(C')$

特に $ca = ac \Longrightarrow 2^n \mid \rho_\pi(C')$

[証明] $\rho_\pi(C') = \sum_{C''} \rho_\pi^{C''} \mu([C'' : C'])$. where C'' runs over all subgroups between C' and C.

ゆえに前補題より上の結論を得る。

Step 3. On the Brauer coefficient at $\pi_\alpha = \langle c^i a^j \rangle$, $i \geq 0$, $j \geq 1$

もし j が奇数ならば, 2-part of $|\langle c^i a^j \rangle| = 2^n$

$\therefore$ 2-part of $[N\pi_d : \pi_d] \leq 2$

それゆえ，今後は $j = 2l$ （偶数），$1 \leq l \leq 2^{n-1} - 1$ と仮定する。

Case 1　$ca = ac$

$$\langle c^i a^{2l} \rangle = \langle c^i \rangle \langle a^{2l} \rangle \subset \langle ca \rangle = \langle c \rangle \langle a \rangle$$

且 $\langle ca \rangle$: maximal cyclic subgroup.

補題 4.5 から，$\langle c^i a^{2l} \rangle$を含む$\pi$のすべての cyclic subgroup は $\langle ca \rangle$ に含まれる。ゆえに補題 4.2より

Brauer coefficient at π_d $(= \langle c^i a^{2l} \rangle) = 0$

Case 2　$ca \neq ac$

(i) $\pi_d = \langle ca^2 \rangle$ のとき

補題 4.3 から $\pi_d = \langle ca^2 \rangle$: a normal maximal cyclic subgroup of π.

$\therefore$ $[N\pi_d : \pi_d] = 4$

(ii) $\pi_d = \langle c^i a^{2l} \rangle$ non maximal のとき

$\pi_d = \langle c^i a^{2l} \rangle \subset \langle c \rangle \langle a^2 \rangle = \langle ca^2 \rangle$ (maximal)

ここで $$\rho_\pi(\pi_d) = \sum_{\pi \supseteq \pi' \supseteq \pi_d} \mu([\pi' : \pi_d]) = \sum_{\langle ca^2 \rangle \supseteq \pi' \supseteq \pi_d} \mu([\pi' : \pi_d])$$

が成立することを示す。補題 4.5 から，$\pi_d = \langle c^i a^{2l} \rangle$ を含み，$\langle ca^2 \rangle$には含まれないような cyclic group は $\langle c^\alpha a^{2k+1} \rangle$ のような type のものにかぎる。

2-part of $|\langle c^{\alpha}a^{2h+1}\rangle| = 2^{n}$,

2-part of $|\pi_d| \leq 2^{n-2}$ ($\because$ π_d : non maximal)

ゆえに 2-part of $[\langle c^{\alpha}a^{2h+1}\rangle : \pi_d] = 2^2$ の倍数

もし $\pi' = \langle c^{\alpha}a^{2h+1}\rangle$ ならば，π' は $\rho_\pi(\pi_d) = \sum_{\pi \supset \pi' \supset \pi_d} \mu($
$[\pi' : \pi_d])$ に影響を与えない。つまりこのような $\pi' =$
$\langle c^{\alpha}a^{2h+1}\rangle$ は除外してよい。すなわち

$$\rho_\pi(\pi_d) = \sum_{\langle ca^2\rangle \supset \pi' \supset \pi_d} \mu([\pi' : \pi_d])$$

ゆえに補題 4.2 から $\rho_\pi(\pi_d) = 0$

以上 Step 1 ～ Step 3 から，定理の証明は完結する。

［証明終］

これから Q_n と書いたとき，quaternion group of n elements を表わすものとする。同様にして以下を得る。

定 理 4.8

$\pi = C \cdot Q_{2^{n+1}}$, $n \geq 3$ semidirect product

$$\Longrightarrow A_2(\pi) = \begin{cases} 2 & \text{if } ac = ca \\ 4 & \text{if } ac \neq ca \end{cases}$$

定 理 4.9

$\pi = C \cdot Q_8$ semidirect product

$$\Longrightarrow A_2(\pi) = \begin{cases} 2 & \text{if one of } a, b, ab \text{ commutes with } c \\ 4 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

定理 4.10

$\pi = C \cdot SD$ semidirect product $\Longrightarrow A_z(\pi) = 4$

References

[1] Lam. T. Y. Artin exponent of finite groups Journal of algebra 9. 94 – 119 (1968)

[2] Brauer, R. Beziehungen zwischen Klassenzahlen von Teilkörpern eines galoisschen Körpers. Math. Nach. 4 (1950 – 51) 158-174

[3] Swan, R. Induced representations and projective modules. Ann. Math 71 (1960) 552 – 578

[4] Swan, R. The Grothendieck ring of a finite group. Topology 2, (1963) 85 – 110.

[5] Curtis, C and Reiner, I. Representation theory of finite groups and associate algebras. Wiley (Interscience) New York 1962.